

Total-RC

理論説明書

T O T A L

Information Service Corporation

(株)トータル・インフォメーション・サービス

- 目 次 -

| | |
|-----------------------|----|
| § 1 . はじめに..... | 1 |
| § 2 . 構成方程式 | 2 |
| § 3 . 形状関数と有限要素化..... | 3 |
| § 4 . 構成則..... | 5 |
| 4 . 1 クラック現象の定式化..... | 5 |
| 4 . 2 離接現象の定式化 | 10 |
| 4 . 3 塑性論..... | 12 |
| 4 . 4 非線形則..... | 15 |
| § 5 . 収束計算手法 | 18 |

§ 1 . はじめに

本書は鉄筋コンクリート構造物の非線形解析プログラム(TOTAL-RC)の理論説明書です。

本システムでは、構造物の解析理論として変位法に基づく有限要素法を用いています。この方法は、(1)に示す平衡方程式を解くことに帰着されます。

$$\{R\} - \{F\} = 0 \quad \dots \dots (1)$$

ここに、

{ R } : 内部応力による等価節点力ベクトル

(注)ここで言う内部応力は、初期応力を含みません。

{ F } : 外荷重ベクトル

内部応力による等価節点力ベクトルは(2)式で与えられます。

$$\{R\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dv \quad \dots \dots (2-a)$$

$$= \int_V [B]^T [D][B] dv \cdot \{U\} \quad \dots \dots (2-b)$$

ここに、

{ } : 内部応力

{ U } : 節点変位ベクトル

[B] : 変位 - 歪関係行列

[D] : 応力 - 歪関係行列

また、(2-b)式の積分結果は通常 [K] で表し、剛性行列と呼ばれます。

有限要素法に関する理論については、数多くの文献及び書籍が出されていますので、詳細は、そちらを参照していただければ幸いです。

§ 2 . 構成方程式

本システムでは、材料の非線形特性を荷重増分法を用いることにより、近似できるものとしている。従って、構成方程式は増分形で表される。弾性問題においては、一般に Hooke の法則として知られている様に次式の形となる。

$$\{\Delta\sigma\} = [De]\{\Delta\varepsilon\} \quad \dots\dots(1)$$

Kupfer 等の実験公式や、クラック問題等の非線形問題では(1)式における応力とひずみの関係 [D e] が応力やひずみ等の状態量の関数として定義される。

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} &= [Dei]\{\Delta\varepsilon\} \\ [De] &= f(\Delta\sigma, \Delta\varepsilon) \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

一方、弾塑性問題における構成式は、弾性応力 - ひずみ関係 [D e] の代わりに弾塑性応力 - ひずみ関係 [D e p] を用いて表される。

$$\{\Delta\sigma\} = [Dep]\{\Delta\varepsilon\} \quad \dots\dots(3)$$

(1) ~ (3)式に示される様に、荷重増分法の下では線形問題と非線形問題との相違は、応力 - ひずみ関係 [D] の相違のみとして表す事ができる。一般 3 次元場での、弾性応力 - ひずみ関係は次式となる。

$$[De] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & & & & (1-2\nu)/2 & 0 \\ & & & & & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4)$$

非線形弾性問題においては、これらの [D e] が応力やひずみ等の依存性を有し、かつ応力解放や異方性等の取扱いを必要とするものの、基本的な考え方は弾性問題と同じで、各荷重段階に応じた [D] が用いられる。

これに対し、弾塑性応力 - ひずみ関係 [D e p] を求めるにあたっては、降伏条件の設定やひずみ硬化仮説等の導入が必要となるが、ここでは導出法の詳細説明は省略する。

§ 3 . 形状関数と有限要素化

有限要素法では、要素内の任意の座標における変位はその要素構成節点の変位より次式によって近似できるとしている。

$$\{U\} = [N]\{d\} \quad \dots \dots (1)$$

ここで、

{ } : 要素構成節点での変位

[N] : 内挿関数あるいは形状関数と呼ばれる

本システムでは、2 次の形状関数を用いる事により、要素内任意点での変位が表現できるものとしている。

下図に示す様な 8 節点の要素を考えた場合、隅の節点、及び、边上の節点は要素座標軸 ξ を用いて次式で表される。(ここで、 $\xi = 0$ 、 $\eta = 0$ 、 $\xi = 1$ 、 $\eta = 1$ としている)

隅の節点 (下図 1 ~ 4)

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1)$$

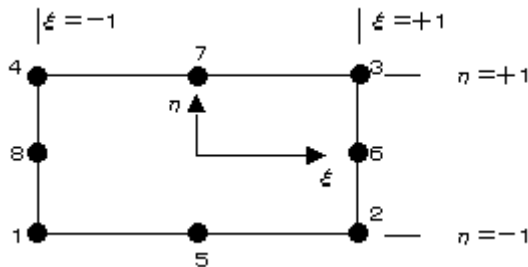
边上の節点

$i = 0$ (下図-点 5,7)

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)$$

$i = 1$ (下図-点 6,8)

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi_0)(1 + \eta^2) \quad \dots \dots (2)$$



(2) 式の ξ_0 、 η_0 中の ξ 、 η に ξ 、 η の座標値を考慮することにより (3) 式が求まる。各点における値は、 N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 、 N_5 、 N_6 、 N_7 、 N_8 にそれぞれ実値を代入する事により求まる。

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) \\ N_2 &= 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) \\ N_3 &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) \\ N_4 &= 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) \\ N_5 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 &= 1/2 (1 + \xi^2)(1 - \eta) \\ N_7 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad \dots \dots (3) \end{aligned}$$

平面要素における変位とひずみとの関係は、

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix}$$

$$= [B]\{u\} \quad \dots\dots(4)$$

ここで〔B〕は(3)式との関係より次の様に表される。

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial X & 0 & \dots\dots\dots \partial N_8 / \partial X & 0 \\ 0 & \partial N_1 / \partial Y & \dots\dots\dots 0 & \partial N_8 / \partial Y \\ \partial N_1 / \partial Y & \partial N_1 / \partial X & \dots\dots\dots \partial N_8 / \partial Y & \partial N_8 / \partial X \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5)$$

以下、仮想仕事の原理、あるいは最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて、次式で示される剛性方程式が導かれる。

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \quad \dots\dots(6)$$

ここで、〔K〕は剛性マトリックスで(5)式の〔B〕と2章の〔D〕を用いて次の様に表される。

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dv \quad \dots\dots(7)$$

初期ひずみ{ ε_0 }や分布物体力等については、それぞれ次式の様に表される。

初期ひずみ

$$\{F\} = -\int_V [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dv \quad \dots\dots(8)$$

分布物体力

$$\{F\} = -\int_V [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} dv \quad \dots\dots(9)$$

強制変位

$$\{F\} = -\int_V [B]^T [D][B] dv \{u\}$$

$$= [K]\{u\} \quad \dots\dots(10)$$

温度上昇

$$\{F\} = \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon t\} dv$$

$$\{F\} = \int_V [B]^T [D]\{\alpha \cdot \Delta t\} dv \quad \dots\dots(11)$$

ここで、

- fx、fy：単位体積当たりの物体力（加速度×質量、等）
- t：温度歪み
- ：線膨張率
- t：増分温度

§ 4 . 構成則

4 . 1 クラック現象の定式化

1) 概要

クラック現象とは、潜在的な不連続面が応力状態等により、その不連続性が活性化するものであり、この様な不連続性の表現方法としては、Discrete Crack (離散ひび割れ) と、Smeared Crack (分散ひび割れ) との 2 つの手法が提案されている。

本システムでは接合要素を用いる事により、Discrete Crack をも表現可能としているが、本来クラックの発生箇所を事前に設定する手法はあまり望ましく無く、よって Smeared Crack を主体としたアルゴリズムを用いている。

クラック現象の定式化にあたり重要な項目としてはクラック発生条件と、発生後の応力 - ひずみ関係が挙げられるが、これらの特性については現在もまだ一般化されておらず、このため本プログラムでは 3 種類の組み合わせを用意し、使用者の判断に委ねている。

2) 定式化

クラック発生に伴い、応力 - ひずみ関係は線形性を失うため、本来 Hooke の法則は成立しないが、各ひずみ状態に応じた応力を設定できるならば、収束計算を行う事により部分的線形手法を用いて定式化する事が可能である。

各増分荷重時にて、応力 - ひずみ関係式は § 2 (2) 式にて示した様に

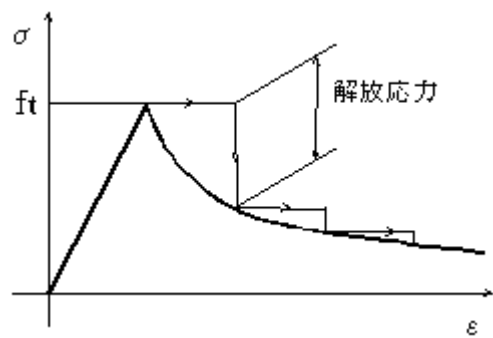
$$\{\Delta\sigma\} = [Dei]\{\Delta\varepsilon\} \quad \dots\dots(1)$$

と表される。ここで、[Dei] は応力、ひずみ等の関数として表される。さて、クラック発生後、応力の正解値 { } が累計ひずみ { } 等の関数として設定できると仮定すれば、

$$\{\sigma\} = f(\sum\varepsilon) \quad \dots\dots(2)$$

(1) 式における増分ひずみの累計値を、(2) 式に代入する事により正しい応力が求まる。この応力と(1) 式より得られた増分応力の累計値 { ' } との差より不平衡力 { F } を求め収束計算を行えば良い。

$$\{F\} = \int_v (\sigma' - \sigma) dv \quad \dots\dots(3)$$



3) 発生条件

クラックは主応力状態により発生するものと仮定し、以下の2つの条件式を設定している。

a) 最大主応力破壊法

最大主応力 (σ_1) が引張強度 (f_t) を上回った時、クラックが生じるとするもので、他の主応力 (σ_2, σ_3) による影響は受けないと仮定している。

$$\sigma_1 \geq f_t \quad \dots \dots (4)$$

b) 2軸主応力破壊法

Kupfer の提案する2軸主応力下における破壊曲面を用いるもので、2軸主応力状態により次の2式に分けられる。

・領域1

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$$

$$\frac{\sigma_1}{f_t} \geq 1.0 - \alpha \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \dots \dots (5)$$

・領域2

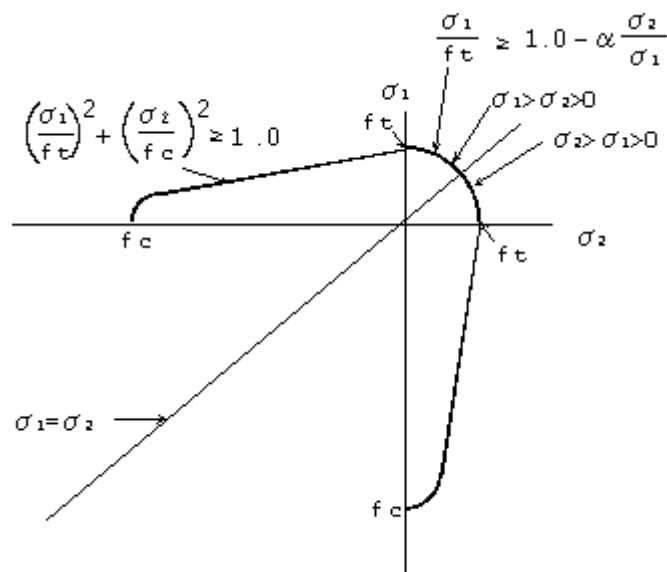
$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_c}\right)^2 \geq 1.0 \quad \dots \dots (6)$$

ここで、

f_c : 圧縮破壊強度

α : 実験定数 ($\alpha = 0.3$)



コンクリートの破壊包絡線

4) 残留特性

クラック発生以後、クラック直交方向の残留特性は変化するものと仮定し、以下3種類の特性を用意している。

a) 増加型 (図-a)

クラック発生以後も、bi-Linear型で応力は増加し続けるとする手法でクラック発生による応力解放は無い。

b) 同時開放型 (図-b)

クラックの発生と同時に応力解放が成され、以後はひずみのみ増加し応力は変化しない。

c) ひずみ依存型 (図-c)

クラック発生以後の残留応力はクラックひずみの関数として、次の指数式で表されると仮定している。

$$\sigma_r = EXP(C(\varepsilon_i - \varepsilon_c)) \cdot ft \quad \dots \dots (7)$$

ここで

ε_c : クラック発生時でのひずみ

ε_i : 現時点でのひずみ

f_t : クラック発生応力

C : 残留特性係数

5) コンクリートのひび割れ局所化モデルの導入

分布ひび割れモデルは、広領域にひび割れが生じてしまう事より、ひび割れ幅やひび割れ進展長さを精度良く得る事は難しい。この為、TOTAL-RCでは、分布ひび割れの局所化を焦点とし、現在提案されている幾つかの手法を導入している。

a) 除荷/再結モデル

コンクリートのひび割れ挙動を支配する大きな要因は、ひび割れ発生基準ならびに、ひび割れた後の引張軟化特性にあるとされ、これまで、ひび割れたコンクリートの除荷挙動や再結時の特性にはあまり着目されていなかった。

堀井先生¹⁾は、除荷経路を考慮した梁の曲げ解析を行い、除荷を考慮する場合には、荷重の増加と共に分散したひび割れが数本に集中し実現象に近づく事を示した。これはひび割れ部より生じる解放応力により、微細ひび割れが除荷経路をたどって閉口する事を示すものであり、その有意性が期待できる。また、堀井先生は荷重～変位曲線にも大きな差異が現れるとしているが、除荷勾配や再結の取扱いについては十分には吟味されていない。これらの点より、以下の機能を有す除荷/再結モデルを導入する。

・除荷の判定基準

除荷の判定はひび割れ歪増分 ($\Delta \varepsilon_c$) を用いて行い、 $\Delta \varepsilon_c$ が負の時除荷経路に入ったとする。

$$\Delta \varepsilon_c < 0 \quad \dots \dots (8)$$

・除荷時の応力～歪関係

除荷時の応力～歪関係は線形であるとし、その傾きは使用者が定めるものとした。

$$\sigma = \sigma_0 + fE_e (\varepsilon_c - \varepsilon_0) \quad \dots \dots (9)$$

ここで、 f : 使用者入力 of 除荷勾配

・再結の判定

再結は、ひび割れ歪 (ε_c) が再結発生歪 (ε_r) に達したとき再結したものとする。

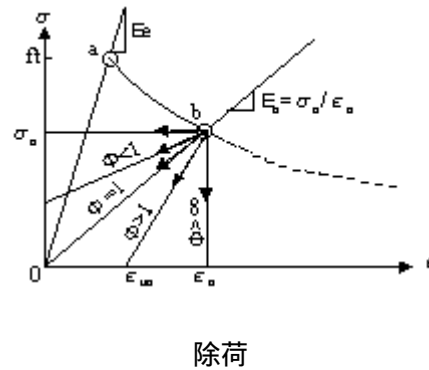
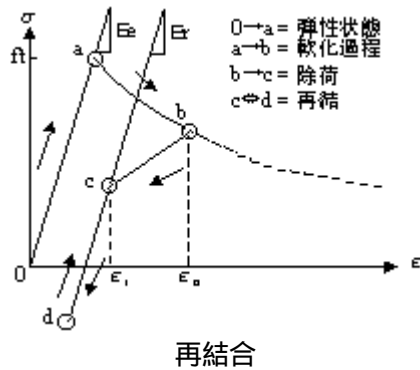
$$\varepsilon_c \leq \varepsilon_r \quad \dots \dots (10)$$

再結発生歪は使用者が与えられるものとした。

・再結後の剛性

再結後は剛性が増加するものとみなし、新たな剛性を与えるものとした。

$$E_r = fE_e \quad \dots \dots (11)$$



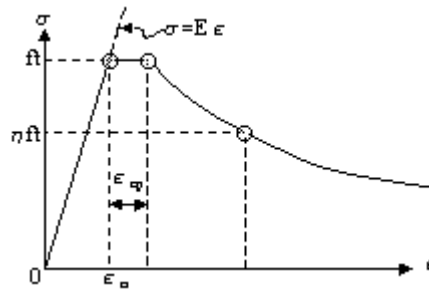
b) 破壊エネルギーの導入

引張やせん断力の作用の下で、コンクリートに生じる破壊現象の特徴は、破壊がある局所領域に集中して起こり、その破壊領域が軟化挙動を示す事である。破壊力学の応用研究委員会によれば、このコンクリートの引張軟化特性は、開口変位～応力関係として与え、その曲線の面積を破壊エネルギー(G_f)と称した。このようなモデルは、仮想ひび割れモデルと呼ばれ、ひび割れが完全に局所化した状態でモデル化したものであり、分布ひび割れモデルに導入するには幾つかの仮定が必要とされている。そこで、吉川先生²⁾は、仮想ひび割れモデルと分布ひび割れモデルの歪エネルギーを等価にする変換則を設け次式で表した。

$$\eta = EXP \left\{ -\varepsilon \left(\frac{G_f}{l_e f_t} - \frac{f_t}{2E_c} \right)^{-1} \right\} \quad \dots \dots (12)$$

c) ひび割れ遷移領域モデルの導入

岡村先生³⁾等はひび割れ発生後、ひび割れ棚が存在するとし、下図に示す応力～歪関係を提案している。こうした遷移領域の存在は、顕著なひび割れからの解放応力による微細ひび割れの閉口を生じ、ひび割れの局所化を促すものとして期待できる。岡村先生等は、遷移領域は、ひび割れ発生歪(ε_{cr})と同等程度としているが、影響度合いを検討するため使用者が定めるものとした。



d) 回転ひび割れモデルの導入

分布ひび割れモデルは、ひび割れ発生後直交異方性材としひび割れ直交方向と平行方向の応力～歪関係を与えている。このようなひび割れモデルは、曲げ引張り場においては効果的な手法であるものの、せん断卓越場においては主軸の回転にともなう2次ひび割れを十分に表現する事ができず、耐力を過大評価する恐れがある。

Rots⁴⁾は、ひび割れ発生後、ひび割れ方向を最大主歪方向に一致させるように応力の再配分を行い、常にひび割れ方向と主軸方向を一致させた。これを回転ひび割れモデルと称し、ひび割れ後の応力～歪関係を次式で与えた。

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_n \\ \Delta \sigma_t \\ \Delta \tau_{nt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_n^T & 0 & 0 \\ 0 & E_n^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_n - \sigma_t}{2(\varepsilon_n - \varepsilon_t)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \\ \Delta \gamma_{nt} \end{pmatrix} \quad \dots \dots (13)$$

【参考文献】

- 1) 堀井秀之：例えば、破壊力学の応用研究委員会，日本コンクリート工学協会，pp.158，pp.499,1993
- 2) 吉川弘道・西藤 厚・金刀督純：引張強度の空間的変動を考慮したコンクリートのFEM破壊シミュレーション，コンクリート工学論文集；コンクリート工学論文集，第7巻第2号，pp.103～117，1996
- 3) 岡村 甫/前川宏一：鉄筋コンクリートの非線形解析と構成則，技報堂出版，1991
- 4) Rots,J.G：Computational Modeling Concrete Fracture，Dissertation，Delft University of Technology，1988

4.2 離接現象の定式化

1) 概要

離接現象とは、構造物間の接触面や、岩盤内の断層等、あらかじめ系全体の弱所が明らかである箇所が応力状態により、その不連続性が活性化するものである。このような不連続性の表現方法としては、各種の手法が提案されているが、大別するとバネ要素を用いる方法と面要素を用いる方法がある。バネ要素による場合は、点接触を十分に表現する事が可能ではあるが、個々のバネ毎に要素分割を考慮したバネ定数を定義しなければならない。一方、面要素の場合には要素特性を定義するのは容易ではあるが、面厚を小さくし過ぎると Ill-Conditioning を生じやすい等の長短があるものの、両手法による大きな相違は無い。

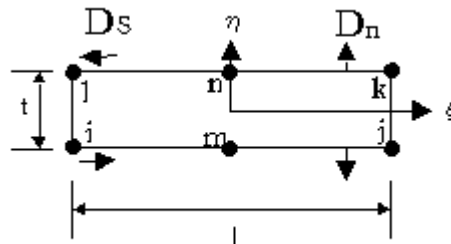
本システムでは直交異方性的な特性を有す面要素（接合要素）を用いる事により離接現象を近似できるとしており、離接条件と発生後の応力 - ひずみ関係については幾種類かのパッケージを用意している。

接合要素の主だった特性を以下に示す。

- ・4,6 節点アイソパラメトリック要素とし、 方向の積分点は2,3点、 方向の積分点は1点とする。
- ・せん断剛性(D_s)と 方向の軸剛(D_n)のみを有し、 方向の剛性は無いものとしている。
- ・ D_s, D_n は各ガウス点毎に応力、ひずみの関数とできる。

3) 定式化

下図に示す長さ l 、厚さ t 、の接合要素は厚さ t が十分小さいとするならば厚さ方向のひずみ分布を無視する事ができ、長手方向のひずみ分布のみを考慮すればよい。



ここで、 $N(\xi, \eta)$ は内挿関数で §3 にて記したものをを用いて 方向のひずみ分布は無視できるとすれば、

$$\begin{aligned} N_j &= N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_k &= N_m = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_n &= N_o = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \end{aligned} \quad \dots \dots (1)$$

応力増分とひずみ増分の間には

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_n \\ \Delta \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_n \\ \Delta \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (2)$$

ここで、 $D_n, D_s, \epsilon_n, \epsilon_s$ はそれぞれ応力やひずみ等の状態量の関数として表される。

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= f(\sigma, \epsilon) \\ [D] &= f(\sigma, \epsilon) \{ \quad \} \end{aligned} \quad \dots \dots (3)$$

以下、通常要素と同様に剛性行列を組み立てる事ができる。また、応力の正解値が設定できるならば、クラックの場合と同様に内力と外力の差より不平衡力を求め、収束計算が行われる。

3) 離接条件

接合要素における離接条件としては、軸方向の分離現象と、滑り現象の2つが有る。

a) 軸方向の分離条件

軸応力(σ_n)が分離発生応力(ft)を上回った時、軸方向の分離が生じたものとし、以後使用者設定の非線形特性に変更する。

$$\sigma_n \geq ft \quad \dots\dots(4)$$

尚、軸ひずみ(ϵ_n)が零となった時、再接触したものとみなし、軸剛性は初期設定値に戻す。

b) 滑り条件

滑り条件としては、Coulomb 則を用いており、次式を満足したとき滑りが生じたものとしている。

$$\sigma_s \geq a + b\sigma_n \quad \dots\dots(5)$$

ここで、a,b は使用者設定の定数としている。

4) 残留特性

軸方向の分離、滑り破壊発生後の残留特性はクラックの場合と同様に3種類(4.1 クラック参照)の条件を用意している。

4.3 塑性論

1) 概要

§ 2 にて記した様に弾塑性応力 - ひずみ関係式を定める為には降伏条件、及び、塑性ポテンシャル関数を設定しなければならない。一般に金属材料における降伏条件としては Von Mises や Tresca の降伏条件式が用いられており、一方、土木材料の場合には、Mohr-Coulomb や Drucker-Prager の条件式が提案されている。このため本システムでは、Von Mises、Mohr-Coulomb 及び Drucker-Prager の降伏条件式を用意しており、これらの条件式を用いる事により弾塑性挙動を表現できるものとしている。

尚、塑性ポテンシャル関数と降伏条件式とは等しいという仮説が一般に用いられている。しかし、土木材料においてはこの仮説が成り立たないという説も有るが、この場合には剛性マトリックスは非対称となり、現在用いられている一般的な手法では解けなくなってしまう。又、妥当と思われる塑性ポテンシャル関数も定式化されておらず、このため本プログラムでも降伏条件式と塑性ポテンシャル関数が等しいという仮説を用いている。

2) Von Mises の条件

等方性の金属材料において最も多く用いられている条件式で、各成分応力を用いて次のように表される。

$$f = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\}} = K \quad \dots \dots (1)$$

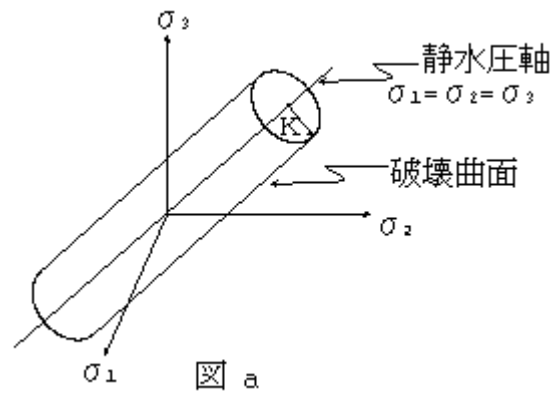
(1)式を正八面体せん断応力を用いて表すと

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} K \quad \dots \dots (2)$$

すなわち、Von Mises の規準は正八面体せん断応力が一定、あるいは弾性ひずみエネルギーが一定値に達した時に降伏する条件式と言える。(図 a)

降伏条件(f)と塑性ポテンシャル(g)とが等しいとすれば、降伏後の応力勾配は(1)式の各応力成分で偏微分することにより得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma_x - 0.5(\sigma_y + \sigma_z) \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma_y - 0.5(\sigma_z + \sigma_x) \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma_z - 0.5(\sigma_x + \sigma_y) \right\} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{3}{\sigma} (\tau_{xy}) \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{3}{\sigma} (\tau_{yz}) \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} &= \frac{3}{\sigma} (\tau_{zx}) \end{aligned}$$



..... (3)

3) Drucker-Prager の条件

土木材料において多く用いられる条件式で有り、Von Mises の条件式に静水圧成分に対する影響を考慮したもので、1次、2次の不偏量を用いて次式で表される。

$$f = \bar{\sigma} = \alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = K \quad \dots \dots (4)$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2' = \frac{1}{6} \left\{ (\sigma_x + \sigma_y)^2 + (\sigma_y + \sigma_z)^2 + (\sigma_z + \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \dots \dots (5)$$

(4)式における第1項が静水圧成分に対する項で、静水圧が大きくなると降伏しづらくなる。(図 b) Von Mises の場合と同様に、降伏後の応力勾配は(4)式を各成分応力にて偏微分する事により得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \alpha + \frac{1}{3J_2} \left\{ \sigma_x - 0.5(\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

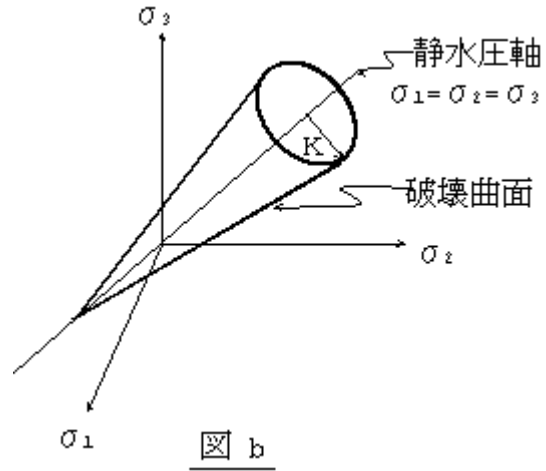
$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \alpha + \frac{1}{3J_2} \left\{ \sigma_y - 0.5(\sigma_z + \sigma_x) \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \alpha + \frac{1}{3J_2} \left\{ \sigma_z - 0.5(\sigma_x + \sigma_y) \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{J_2} (\tau_{xy})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{J_2} (\tau_{yz})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} = \frac{1}{J_2} (\tau_{zx}) \quad \dots \dots (6)$$



4) Mohr-Coulomb の条件

土木材料において最も多く用いられている条件式で、次式で示される様に主せん断破壊説である。

$$\frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{2} \geq \frac{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})}{2} \sin \phi \pm C \cos \phi \quad \dots \dots (7)$$

ここでCは粘着力、φは内部摩擦角を示す。

さて上式にて明らかな様に Mohr-Coulomb の条件式では最大主応力と最小主応力の2軸応力しか用いておらず、このため軸対称問題や3次元問題においては、降伏後の応力状態を全て求める事はできない。よって、プログラム内では Mohr-Coulomb の条件式を特殊解として、内蔵している Drucker-Prager の条件式へ変換し用いている。

平面歪の条件のもとでは(4)式における定数の α、k は各々C、φを用いて次のように表す事ができる。

$$\alpha = \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}}$$

$$K = \frac{3C \cdot \sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \quad \dots \dots (8)$$

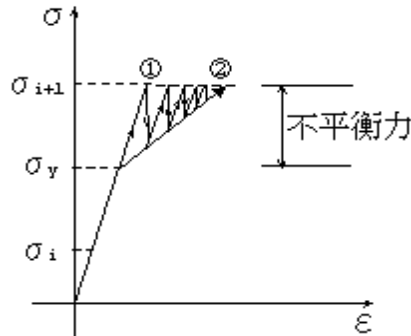
以下、Drucker-Prager の条件と同様に(6)式にて降伏後の応力勾配を表す事ができる。

5) 遷移領域の取り扱い

荷重増分法の場合、ある荷重増分内にて弾性状態と塑性状態とが混在する事となる。この状態を遷移領域と称し、解の精度を高めるためには、応力、ひずみ等の補正処理が必要となる。

説明の簡略化のために単軸応力場にて考え、STEP_iにて弾性、STEP_{i+1}にて塑性とするとSTEP_{i+1}の結果として の点が得られる。正しい結果を 点とするならば、 の応力、ひずみを得るためには次の手順を用いれば良い。

- (1) σ_y (降伏強度)における応力、ひずみを収束計算の始点とする。
- (2) 塑性インデックスをセットし、[Dep]を作成する。
- (3) 内力と外力の差より不平衡力を求め、これを外力とし収束計算を行う。



6) 除荷の判定

塑性継続のもとでは、 $d f$ あるいは相当塑性ひずみ増分 p が正值で無ければならない。このため p の符号を判定し、これが負値の場合には除荷状態とみなす事ができる。

4.4 非線形則

1) Kupfer 則

コンクリートや地盤等の土木材料は、1軸圧縮試験や3軸圧縮試験結果に示される様に非線形な応力-ひずみ関係を有しており、このような非線形性に対する種々の構成方程式が提案されている。本システムではこれらの提案式のうち、コンクリートにて最も適していると考えられる、Kupferの実験公式をパッケージとして組み込んでいる。

Kupferによれば、ヤング率、ポアソン比の非線形特性は八面体せん断応力 τ_{oct} 及び、八面体せん断ひずみ γ'_{oct} を用いて次式で表されるとしている。

$$\frac{G_s}{G_o} = 1 - a \left(\frac{\tau_{oct}}{fc} \right)^m \quad \dots \dots (1)$$

$$\frac{G_t}{G_o} = \frac{\left\{ 1 - a \left(\frac{\tau_{oct}}{fc} \right)^m \right\}^2}{1 + (m-1)a \left(\frac{\tau_{oct}}{fc} \right)^m} \quad \dots \dots (2)$$

$$\frac{K_t}{K_o} = \frac{\left(\frac{G_s}{G_o} \right)}{EXP \left\{ - \left(\frac{C}{\gamma'_{oct}} \right)^p \right\}} \quad \dots \dots (3)$$

$$\frac{K_t}{K_o} = \frac{\left(\frac{G_s}{G_o} \right)}{EXP \left\{ - \left(\frac{C}{\gamma'_{oct}} \right)^p \right\} \left[1 - P \left(\frac{C}{\gamma'_{oct}} \right)^p \right]} \quad \dots \dots (4)$$

ここで γ'_{oct} は $\frac{\gamma_{oct}}{2}$ である。

a,m,c,p は実験定数で各々下表の値となっている。 (Unit:kgf/cm²)

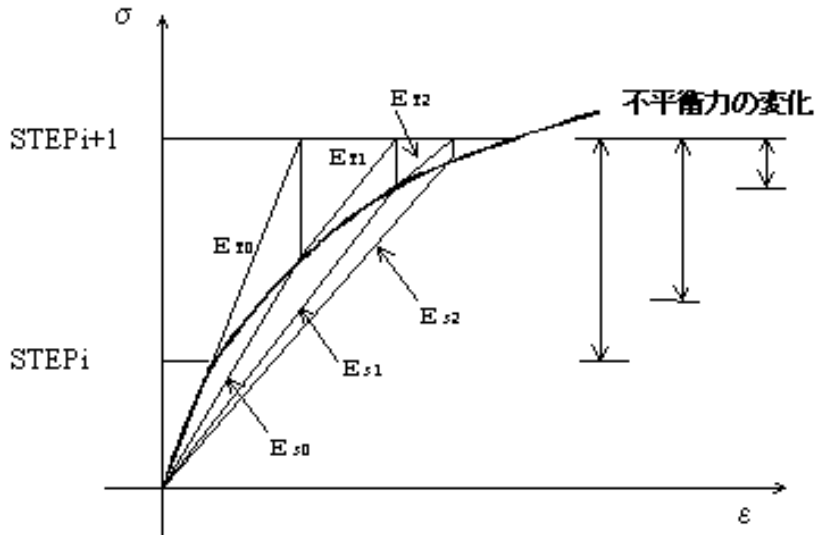
| コンクリート | fc [kgf/cm ²] | G/fc | a | m | K/fc | c | p |
|--------|---------------------------|-------|-----|-----|-------|-------|-----|
| 1 | 191.0 | 650.0 | 2.9 | 2.0 | 830.0 | 470.0 | 1.9 |
| 2 | 324.0 | 425.0 | 3.4 | 2.4 | 556.0 | 420.0 | 2.2 |
| 3 | 619.0 | 261.0 | 5.3 | 4.0 | 415.0 | 500.0 | 3.4 |

又、添字 S は割線係数、添字 T は接線係数を示す。体積係数(K)とせん断係数(G)は次式よりヤング率(E)とポアソン比()へ変換できる。

$$E = \frac{9KG}{3K + G}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad \dots \dots (5)$$

さて(1)、(3)式より現在の応力、ひずみ状態に応じた割線係数が得られ、これにより正しい応力、ひずみを求める事ができる。一方(2)、(4)式より接線係数が得られ、以後の荷重に対してはこの接線係数が用いられる。又、応力の残余分についてはこれを不平衡力として収束計算が行われる。



2) ソフトニング

今、何らかの相当化式のもとで、ソフトニング領域における相当応力($\bar{\sigma}$)と相当ひずみ($\bar{\varepsilon}$)との関係が定義されているものとする。

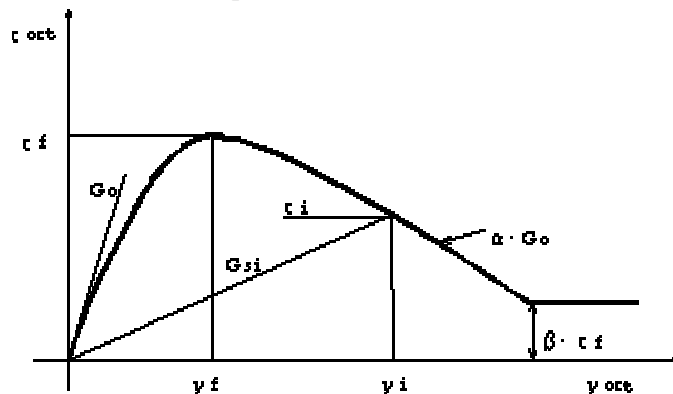
$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}) \quad \dots \dots (4)$$

接線係数法を用いている場合、ある荷重時点における相当応力と相当ひずみとの関係は上式を満足する事はない。このためひずみを正解値とし上式に代入し真の相当応力を得る。

次に得られた相当応力を成分応力へ変換する関係式が必要となる。この関係式が定義されているものとするれば、真の成分応力が求められる。

$$\{\sigma\} = f\{\bar{\sigma}\} \quad \dots \dots (7)$$

本システムではこの真の成分応力が設定されれば、不平衡応力の算出や収束処理は概存のアルゴリズムで行う事ができる。よって(2)、(3)式で示される関係式を設定すれば、ソフトニング現象を扱う事が可能となる。詳細は示しませんが、本システムでは、Kupfer 則と同様に、 τ_{oct} 、 τ_{f} を用いて相当化がなされている。



3) 除荷の取り扱い

除荷現象においても、ソフトニングと同様に相当化の概念が必要となる。しかし、一般の弾塑性論では相当応力が降伏応力を上回った以後、除荷処理が必要であるのに対し Kupfer 則を用いている場合には、常に除荷処理が必要となる。また、圧縮破壊する前と後とで、多少処理が異なる点に留意しなければならない。

相当応力 - 相当歪関係において荷重増加、除荷の判定式が定義されているものとする。

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = C \quad \dots \dots (8)$$

上式を満足した場合除荷とみなされ、以降、異なった応力 - 歪関係式が必要となる。

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}) \quad \dots \dots (9)$$

その後の荷重変化により荷重が増加する場合には、骨格曲線への復活判定式が必要となる。

$$g(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = C \quad \dots \dots (10)$$

これら 3つの関係式が必要となると共に解の精度を高めるためには、変化部での遷移領域補正が必要となる。

一般に除荷判定は相当歪増分 ($\bar{\varepsilon}$) の正負にて行い、 $\bar{\varepsilon}$ が負に変化した時、除荷とみなす。

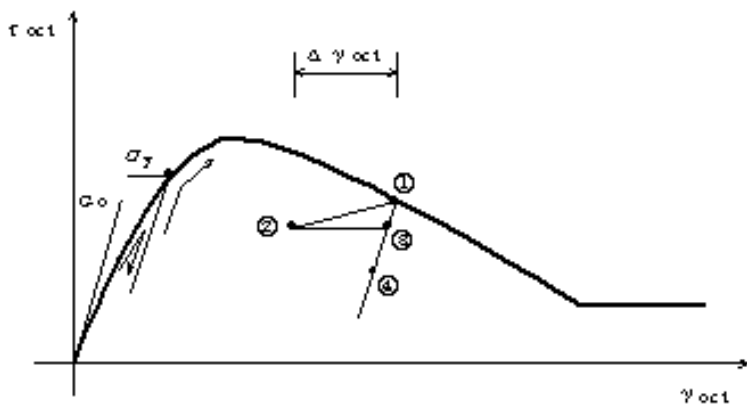
$$\bar{\Delta\varepsilon} = \Delta\gamma_{oct} = \gamma_{octi} - \gamma_{octi-1} \leq 0 \quad \dots \dots (11)$$

除荷後の応力 - 歪関係は弾性 (初期剛性) と仮定すれば

$$[D]_i = [D]_0 \quad \dots \dots (12)$$

一方、骨格曲線への復帰は相当応力 () によって判定できるものとし、相当応力が除荷時の相当応力 (σ_y) に達した後は骨格曲線へ戻るものと仮定する。

$$\bar{\sigma} = \gamma_{oct} \geq \bar{\sigma}_y \quad \dots \dots (13)$$



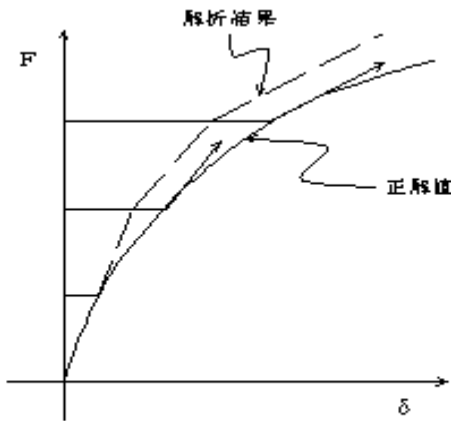
§ 5 . 収束計算手法

非線形特性を有す材料を解析するに当たっては、その精度を高めるために種々の収束計算手法が提案されている。荷重増分法の場合には一般に各荷重増分時における接線係数を用いて計算が行われ、得られた増分応力、増分歪を累計している。しかし、下図(a図)に示される様に増分荷重が粗いと大きな誤差を生じる恐れがあり、また、複雑な構造物においては前もって妥当と思われる増分荷重値を設定する事も容易ではない。このため、各荷重増分内にて内力と外力との差を求め、これを不平衡力とした収束計算手法が多く用いられている。

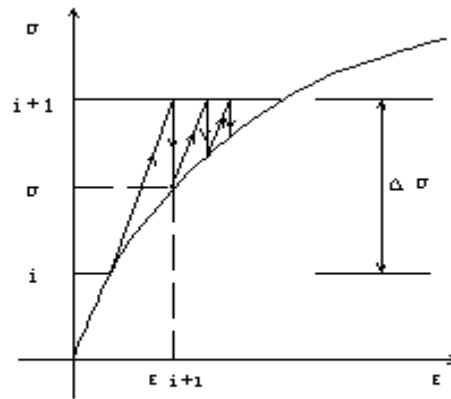
本システムでは、この収束計算手法として、Newton-Raphson 法と修正 Newton-Raphson 法の2種類を用意している。

簡略化のため、1軸場での応力と歪について考え、荷重ステップ*i*にて正解値が得られているものとし、増分荷重 F による挙動を考える。ステップ*i*での応力 - 歪関係 $[D_i]$ を用いて

$$\{F\} = [K]\{\Delta u\} = \int_v [B]^T [D_i][B] dv \cdot \{\Delta u\} \quad \dots \dots (1)$$



a 図



b 図

増分応力 $\{\Delta \sigma\}$ 、増分歪 $\{\Delta \varepsilon\}$ は

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B]\{\Delta u\}$$

$$\{\Delta \sigma\} = [D_i]\{\Delta \varepsilon\}$$

$\dots \dots (2)$

よって $i + 1$ ステップでの累計歪、累計応力は

$$\{\varepsilon_{i+1}\} = \{\varepsilon_i\} + \{\Delta \varepsilon\}$$

$$\{\sigma_{i+1}\} = \{\sigma_i\} + \{\Delta \sigma\}$$

$\dots \dots (3)$

さて累計歪 $\{\varepsilon_{i+1}\}$ における正解応力 $\{\sigma'\}$ が歪等の関数として求まるものとするれば、

$$\{\sigma'\} = f(\varepsilon_{i+1})$$

$\dots \dots (4)$

内力は

$$[F'] = \int_v [B]^T \{\sigma'\} dv \quad \dots\dots(5)$$

この内力と外力とは本来釣り合わなければならないが、(4)式による補正を行ったため、その差は零とはならない。

$$\{F\} - \{F'\} \neq 0 \quad \dots\dots(6)$$

この不平衡力を外力項とし収束計算を行う。この際、剛性行列を新たに作り直す手法を Newton-Raphson 法、同一の剛性行列を用いる手法を、修正 Newton-Raphson 法と称す。Newton-Raphson 法の場合には応力 - 歪関係式が(3)式や(4)式より得られた応力や歪の関数として定まらなければならない。

$$[D'] = f(\sigma, \varepsilon) \quad \dots\dots(7)$$

$$[K'] = \int_v [B]^T [D'] [B] dv \cdot \{\Delta u\} \quad \dots\dots(8)$$

収束の判定は外力 $\{F\}$ と内力 $\{F'\}$ とについて各々次式によって得られる NormVector の比が規定値以下か否かによって判定している。

$$VF = F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 + \dots\dots\dots \quad \dots\dots(9)$$

$$VF' = F_i'^2 + F_j'^2 + F_k'^2 \dots\dots\dots \quad \dots\dots(10)$$

$$R = VF / VF' \geq a \quad \dots\dots(11)$$

ここで a は使用者入力 of 収束判定値